

# Introducción al Álgebra

## Prueba control 1 (11-1)

P1:  $A, B, C \in \mathcal{U}$ .  $(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

$$(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A - B) \cup (B - A) \cup (B - C) \cup (C - B) \quad \text{Definición de } \Delta$$

$$= (A \cap B^c) \cup (C \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (B \cap C^c) \quad \left\{ \begin{array}{l} P - Q = P \cap Q^c \\ \text{y conmutatividad} \end{array} \right.$$

$$= [(A \cup C) \cap B^c] \cup [B \cap (A^c \cup C^c)] \quad \text{Distributividad.}$$

(2.0) →

$$= [(A \cup C) \cap B^c] \cup [B \cap (A^c \cup C^c)] \quad \text{Distributividad}$$

(2.0) →  $= [(A \cup C \cup B) \cap (B^c \cup B)] \cap [(A \cup C \cup A^c \cup C^c) \cap (B^c \cup A^c \cup C^c)] \quad \text{Distributividad.}$

$$= [(A \cup B \cup C) \cap \overline{U}] \cap [(U \cup U) \cap (A \cap B \cap C)^c] \quad \left\{ \begin{array}{l} P \cup P^c = U \text{ y} \\ \text{Morgan} \end{array} \right.$$

$$= (A \cup B \cup C) \cap (A \cap B \cap C)^c$$

(2.0) →  $= (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

P2: i) Se define  $\bowtie$  por  $(p \bowtie q) \Leftrightarrow (\exists n \text{ t.q. } p \Leftrightarrow n \wedge n \Leftrightarrow q)$

Demuestra que  $(p \bowtie q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

( $\Rightarrow$ ) Sea  $(p \bowtie q) \Leftrightarrow (\exists n \text{ t.q. } p \Leftrightarrow n \wedge n \Leftrightarrow q)$

(1.0) →  $\Rightarrow p \Leftrightarrow q \quad \text{Por transitividad de } \Leftrightarrow$

( $\Leftarrow$ ) Sea  $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow \overbrace{p \Leftrightarrow p}^{\vee} \wedge p \Leftrightarrow q$

$\Rightarrow \exists n = p \text{ t.q. } p \Leftrightarrow n (=p) \wedge n (=p) \Leftrightarrow q$

(2.0) →  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} p \bowtie q$

ii) Demostrar que  $[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge r] \Rightarrow \bar{p}$  es tautología.

1ª Forma: Por inspección.

El único caso de interés es suponer  $[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge r]$  verdadero de donde debe concluirse que  $\bar{p}$  es verdadero.

En efecto  $[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow V$  entonces

$$\textcircled{1.0} \rightarrow r \Leftrightarrow V \wedge (\bar{p} \vee q) \Leftrightarrow V \wedge (p \Rightarrow \bar{q}) \Leftrightarrow V$$

$$\textcircled{1.0} \rightarrow \text{de donde } (\bar{p} \vee q) \Leftrightarrow (F \vee q) \Leftrightarrow V \text{ de donde } q \Leftrightarrow V$$

$$\textcircled{1.0} \rightarrow \text{Por último } V \Leftrightarrow (p \Rightarrow \bar{q}) \Leftrightarrow (p \Rightarrow F) \text{ de donde } p \Leftrightarrow F$$

$$\textcircled{1.0} \rightarrow \text{Se concluye que } \bar{p} \Leftrightarrow V$$

2ª Forma: Álgebra Lógica. (uso de tautologías conocidas)

$$[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge r] \Rightarrow \bar{p}$$

$$\Leftrightarrow [(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge r] \Rightarrow \bar{p}$$

Definición de  $\Rightarrow$

$$\Leftrightarrow [(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge \underbrace{(r \wedge \bar{r}) \vee (r \wedge q)}_F] \Rightarrow \bar{p}$$

distributividad.

$$\textcircled{1.0} \Leftrightarrow [(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (r \wedge q)] \Rightarrow \bar{p}$$

$$F \vee (\text{prop}) \Leftrightarrow (\text{prop})$$

$$\Leftrightarrow [(q \wedge \bar{p}) \vee \underbrace{(q \wedge \bar{q})}_F] \wedge r \Rightarrow \bar{p}$$

distributividad.

$$\Leftrightarrow [q \wedge \bar{p} \wedge r] \Rightarrow \bar{p}$$

$$F \vee (\text{prop}) \Leftrightarrow (\text{prop})$$

$$\textcircled{1.0} \Leftrightarrow (\bar{q} \vee p \vee \bar{r}) \vee \bar{p}$$

Definición de  $\Rightarrow$  y Morgan.

$$\Leftrightarrow (\bar{q} \vee \bar{r}) \vee \underbrace{(p \vee \bar{p})}_V$$

Commut. y asociatividad.

$$\textcircled{1.0} \Leftrightarrow (\bar{q} \vee \bar{r}) \vee \underbrace{V}_V \Leftrightarrow V$$

$$(\text{prop}) \vee V \Leftrightarrow V$$